第20講　図形の性質と作図，空間図形

§1 ▶ 2つの円の位置関係と共通接線

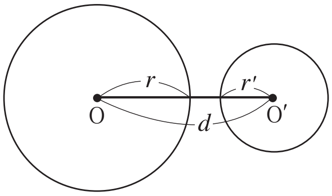
要点整理 と 公式

要点 1　2つの円の位置関係

2つの円の位置関係は，それぞれの円の半径と，中心間の距離で決まる。

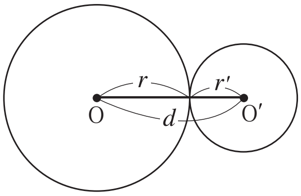
円O，円O′の半径をそれぞれ r，r'（$r > r'$），中心間の距離を d とすると，2つの円O，O′の位置関係には次の5通りの場合がある。

① 互いに外部にある



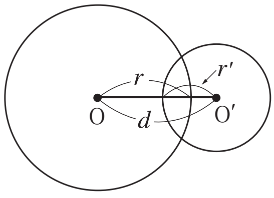
$d > r + r'$

② 「　　　」する



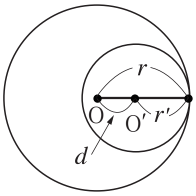
「　　　　　」

③ 2点で交わる



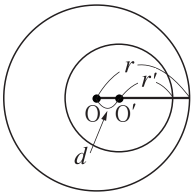
$r - r' < d < r + r'$

④「　　　」する



「　　　　　　　」

⑤ 一方が他方の内部にある



$d < r - r'$

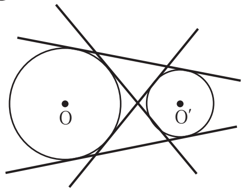
②と④は，2つの円がただ1点を共有しており，その共有点を「接点」という。

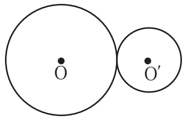
また，2つの円の接点は，2つの円の中心を通る直線上（中心線上）にある。

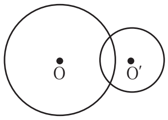
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

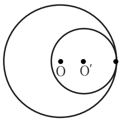
要点❷ ２つの円の共通接線

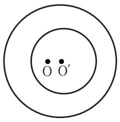
１つの直線が２つの円の両方の接線となっているとき，この接線を共通接線という。

①


②


③


④


⑤


共通接線の本数は

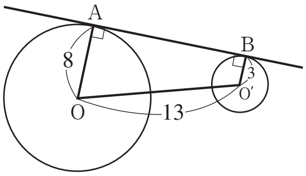
①のとき４本，②のとき　　本，③のとき　　本，④のとき　　本，⑤のとき　　本 である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

(1)　2 円 O，O′ の半径をそれぞれ 3，6，中心間の距離を 9 とする。2 円 O，O′ の位置関係と，共通接線の本数を答えよ。

(2)　右の図で，直線 AB は 2 つの円の共通接線で，A，B は接点である。線分 AB の長さを求めよ。



Point Pickup

2 円の位置関係と共通接線の本数

⇒　2 円の半径と，中心間の距離で決定

特に，2 円が「外接」 ⟺ (中心間の距離)＝(半径の「和」)

「内接」 ⟺ (中心間の距離)＝(半径の「差」)

共通接線の接点間の距離

接点において，接線と半径は垂直。その半径に対し，他方の円の中心から垂線を下ろすと，長方形と直角三角形ができる。

これを利用し，三平方の定理で接点間の距離を求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 作図

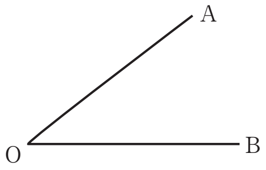
要点整理 と 公式

要点3 基本的な作図

「作図」… 与えられた2点を通る直線を引く「定規」と，与えられた1点を中心として，与えられた半径の円をかく「コンパス」だけを用いて，条件を満たす図形をかくこと。

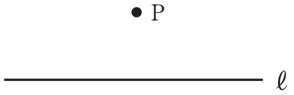
＜線分ABの垂直二等分線＞

＜∠AOBの二等分線＞

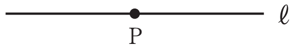


＜点Pを通り，ℓ に垂直な直線＞

点Pが直線 ℓ 上にないとき



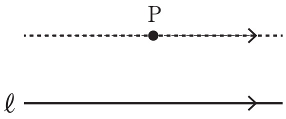
点Pが直線 ℓ 上にあるとき



要点4 平行線の作図

直線 ℓ 上にない点Pを通り，

ℓ に平行な直線を作図する方法を考える。

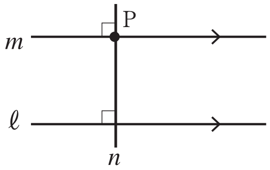


2つの平行線 ℓ，m があるとき，直線 ℓ と垂直な直線は，

直線 m とも垂直である。

よって，点Pを通り直線 ℓ に垂直な直線 n をひき，

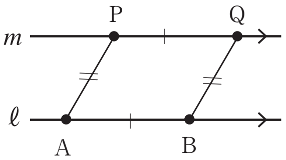
点Pを通り直線 n に垂直な直線をひけばよい。



他にも，直線 ℓ 上に適当な2点A，Bをとり，

四角形ABQPが平行四辺形になるような点Qを

作図で求める方法などがある。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

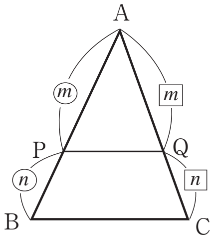
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

右図において，PQ // BC ならば AP：PB = AQ：QCである。

このことを利用して，線分 AB を 2：3に内分する点を

作図せよ。



Point Pickup

線分 AB を m：n に内分する点の作図

⇒　線分 AB とは別の直線上に m：n に内分する点をとる。

$(m+n)$等分する点をコンパスで取るとよい。

その後，平行線と線分の比の性質を用いて，m：n となる点を線分 AB 上にとる。平行線の作図が必要。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

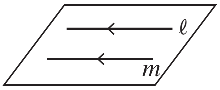
§3 ▶ 直線と平面

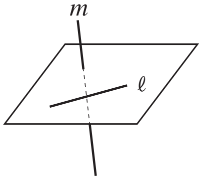
要点整理 と 公式

要点5　2 直線の位置関係となす角

空間における 2 直線 ℓ，m の位置関係は，以下の 3 つ。

①　1 点で交わる　　②　平行である　　③　ねじれの位置にある

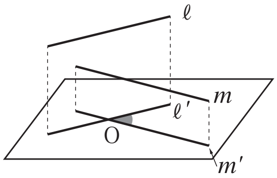




同一平面上にある（①，②）

交わらない（②，③）

③の場合について，空間内の 1 点 O を通り ℓ，m に平行な直線をそれぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ'，m' は同一平面上にある。このとき，ℓ'，m' のなす角を「2 直線 ℓ，m のなす角」という。



2 直線 ℓ，m のなす角が 90° のとき，ℓ と m は「　　　」であるといい，ℓ　　　m と書く。

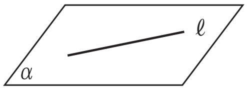
ℓ と m が垂直かつ交わるとき，ℓ と m は「　　　」するという。

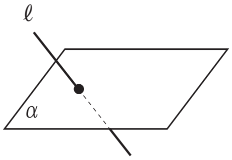
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

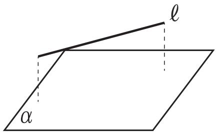
要点6 直線と平面の位置関係

空間における直線 ℓ と平面 α の位置関係は，以下の３つ。

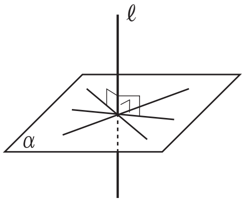
① ℓ が α 上にある　② １点で交わる　③ 平行である（$\ell \parallel \alpha$）



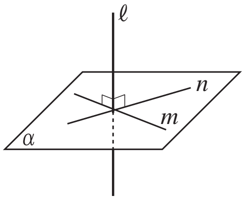




②において，直線 ℓ が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，ℓ は α に「　　　」である（平面 α と直交する）といい，ℓ 　　 α とかく。またこのとき，直線 ℓ を平面 α の「　　　」という。



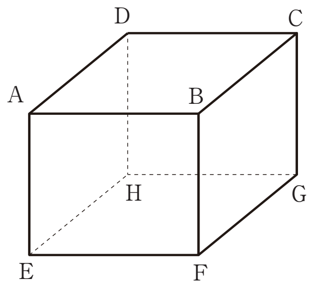
直線 ℓ が，平面 α 上の交わる２直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

右図の立方体について，次の問いに答えよ。



(1)　辺 AB と直交する辺を求めよ。

(2)　辺 AB と垂直な辺を求めよ。

(3)　辺 AB とねじれの位置にある辺を求めよ。

(4)　2 直線 AB，EG のなす角 θ を求めよ。
ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(5)　辺 AB と垂直な面を答えよ。

Point Pickup

空間における 2 直線のなす角

⇒　直線を平行移動させ，同一平面上で考える。
また，「直交」と「垂直」の違いに注意。

直線と平面が垂直になるための条件

⇒　平面上の交わる 2 つの直線に垂直

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 多面体

要点整理 と 公式

要点 7 多面体

「多面体」… 平面だけで囲まれた立体

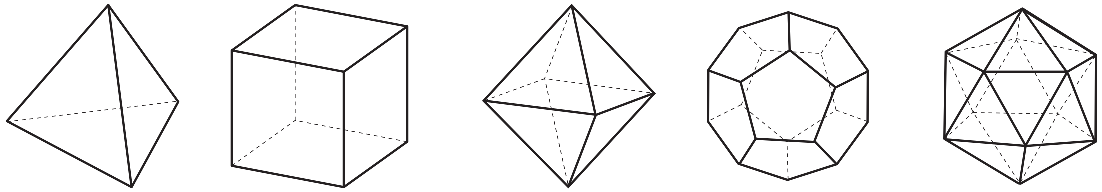
（ex）直方体　　立方体　　三角柱　　四角錐

へこみのない多面体のうち，次の２つの条件をともに満たすものを「正多面体」という。

① どの面もすべて合同な正多角形である

② どの頂点にも同じ数の面が集まっている

正多面体は，次の５種類しかない。



正四面体　　正六面体　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

へこみのない多面体について，次のことが成り立つ。

■ オイラーの多面体定理

多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

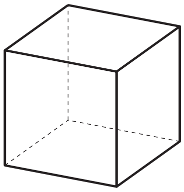
$$v - e + f = 2$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

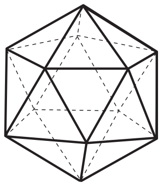


正六面体(立方体)の面の数は6個である。

その1面に関して，頂点の数は4個ある。

ここで，1つの頂点につき，面は3個ずつ集まっていることから，

頂点の数は $\dfrac{4\times6}{3}=8$ (個) と求めることができる。



(1)　右図は正二十面体である。この図と上の考え方を参考に，正二十面体の頂点の数を求めよ。

(2)　正二十面体の辺の数を求めよ。

(3)　正二十面体について，オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。

Point Pickup

正多面体の頂点や辺の数

正多面体を正確に書くことが難しいとき，その頂点の数について

(面ごとの頂点の個数) × (面の数) ÷ (重複度合い)

で求めることができる。辺の数も同様。

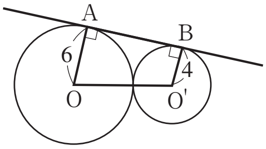
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

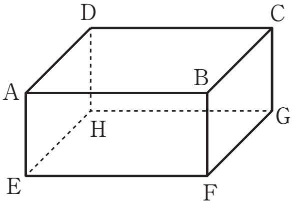
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

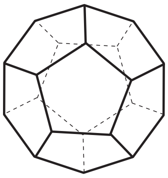
1 右の図で，直線 AB は２つの円O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。O，O′ が外接しているとき，$OO' =$ [アイ]，$AB =$ [ウ] $\sqrt{[エ]}$ である。



2 右の直方体において，辺 AB と垂直な辺は [オ] 本，辺 AB とねじれの位置にある辺は [カ] 本ある。
また，$AB = \sqrt{3}$，$AD = 1$ のとき，$AC =$ [キ] であり，このとき辺 AD と線分 EG のなす角は [クケ]° である。



3 正多面体は全部で [コ] 種類しかないことが知られている。
正十二面体の頂点の数は [サシ]，辺の数は [スセ] である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　図形の性質と作図，空間図形

1

(1)　9 = 3+ 6 より，2 円の中心間の距離と半径の和が等しい。

よって，2 円 O，O′は外接する。また，共通接線の本数は 3 本。

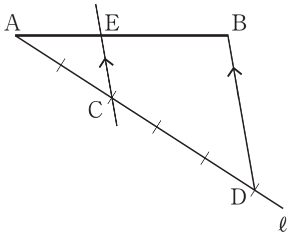
(2)　O′から OA に垂線 O′H を下ろすと，OH = 5

よって，$OO'^2 = OH^2 + O'H^2$ より $13^2 = 5^2 + O'H^2$　$O'H = 12$

したがって，AB = 12

2　右図の点 E が線分 AB を 2：3 に内分する点。

平行線の作図は省略。



3

(1)　辺 AD，AE，BC，BF　　(2)　辺 AD，AE，DH，EH，BC，BF，CG，FG

(3)　辺 DH，EH，CG，FG

(4)　2 直線 AB，EG のなす角は，2 直線 AB，AC のなす角に等しい。

よって，45°

(5)　面 AEHD，BFGC

4

(1)　正二十面体の面の数は 20 個である。その 1 面に関して，頂点の数は 3 個ある。

ここで，1 つの頂点につき，面は 5 個ずつ集まっていることから，

頂点の数は $\dfrac{3\times20}{5} = 12$（個）

(2)　正二十面体の 1 面に関して，辺の数は 3 個ある。

ここで，1 つの辺につき，面は 2 個ずつ集まっていることから，

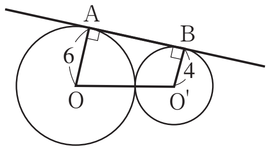
辺の数は $\dfrac{3\times20}{2} = 30$（個）

(3)　$v - e + f = 12 - 30 + 20 = 2$　より成り立つ。

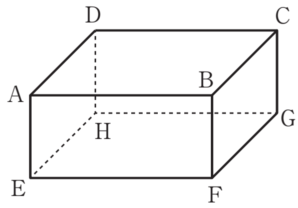
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

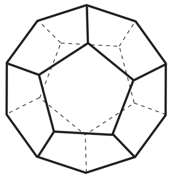
1　右の図で，直線 AB は 2 つの円O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。O，O′ が外接しているとき，$OO' =$ アイ ，$AB =$ ウ $\sqrt{\text{エ}}$ である。



2　右の直方体において，辺 AB と垂直な辺は オ 本，辺 AB とねじれの位置にある辺は カ 本ある。
また，$AB = \sqrt{3}$，$AD = 1$ のとき，$AC =$ キ であり，このとき辺 AD と線分 EG のなす角は クケ °である。



3　正多面体は全部で コ 種類しかないことが知られている。
正十二面体の頂点の数は サシ ，辺の数は スセ である。



{ 解答 }

1	ア　1	イ　0	ウ　4	エ　6	
2	オ　8	カ　4	キ　2	ク　6	ケ　0
3	コ　5	サ　2	シ　0	ス　3	セ　0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。